بدفهمی در احتمال هم‌شانس و غیرهم‌شانس

فریده کمالی محمدزاده
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

چکیده

پیشامدهای هم‌شانس و غیرهم‌شانس و وجه تمایز احتمال این پیشامدها وقتی فضای نمونه‌ای از ترکیب چند رخداد تشکیل می‌شود، مطلبی است که در کتاب‌های درسی جبر و احتمال، و ریاضی عمومی و گسسته به خوبی به آن پرداخته نشده است. به همین علت گاه دبیران و به تبع آن دانش‌آموزان و حتی طراحان سؤال دربارهٔ آن دچار اشتباه و بدفهمی می‌شوند.
سؤال ۱۲ امتحان نهایی جبر خرداد ۹۴ و کلید آن که به لحاظ محتوای سؤال یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس را ترسیم می‌کرد، بهانه‌ای شد برای نگارندگان تا به علت خلأ موجود در کتاب‌های درسی در زمینهٔ احتمال غیرهم‌شانس، بار دیگر این مطلب مهم را یادآور شوند که دقت در هم‌شانس بودن رخدادها در طراحی مسئلهٔ امتحانی که احتمال پیشامدها مورد سؤال مسئله است، امری ضروری است تا شاهد اشتباهاتی از قبیل آنچه در کلید سؤال ۱۲ امتحان نهایی جبر و احتمال دی‌ماه ۹۱ اتفاق افتاد، نباشیم.
در این مطالعه به مسئلهٔ تشخیص احتمال‌های غیر هم‌شانس در فضاهای نمونه‌ای مرکب از چند رخداد، بدون استفاده از احتمال کل که در کتاب‌های ریاضی عمومی و گسسته آمده و پیش‌نیاز آن احتمال شرطی و استقلال پیشامدهاست، با توجه به اطلاعات دانش‌آموزان سوم ریاضی پرداخته شده و در پایان آموزش‌های غلط رایج در سی‌دی‌ها و فیلم‌های آموزشی در موضوع فضاهای نمونه‌ای هم‌شانس و غیرهم‌شانس مورد نقد و بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: فضای نمونه‌ای، پیشامد تصادفی، احتمال هم‌شانس و غیرهم‌شانس

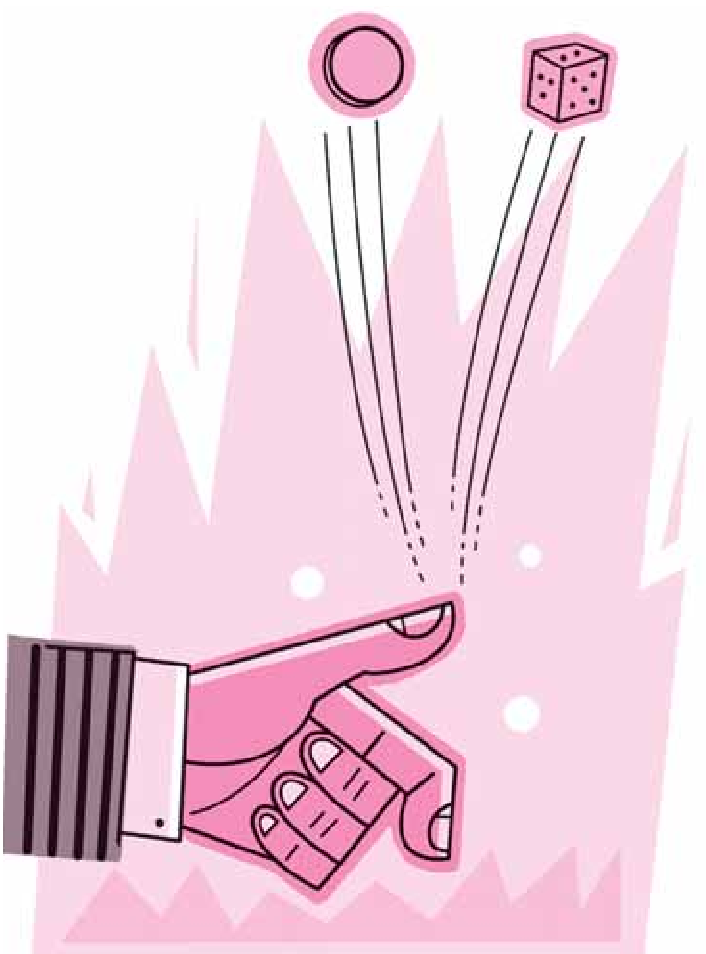
مقدمه

امروزه موضوع برخی از علوم، پیش‌بینی در شرایط عدم قطعیت است. از احتمال وقوع یک پیشامد برای مدل‌سازی شانس وقوع آزمایش و پدیده‌های تصادفی استفاده می‌شود.

بخش اول

مدل احتمال، شامل فضای نمونه‌ای، پیشامد تصادفی و تخصیص احتمال وقوع پیشامد موردنظر است.

- **فضای نمونه‌ای:** مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.
- **پیشامد تصادفی:** هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را یک پیشامد گویند. اگر این زیرمجموعه تک‌عضوی باشد، آن را یک **پیشامد ساده** گوییم.
- **فضای نمونه‌ای یکنواخت:** فضای نمونه‌ای گسسته‌ای که در آن احتمال رخداد همهٔ پیشامدهای ساده با هم برابر است.
- **فضای نمونه‌ای غیریکنواخت:** در این فضا احتمال وقوع پیشامدها در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان نیست. در این فضا احتمال‌های متفاوت به پیشامدهای ساده تخصیص داده می‌شوند.
- **احتمال کلاسیک:** در پدیده‌های تصادفی که فضای نمونه‌ای آن‌ها یکنواخت یا هم‌شانس است، احتمال هر پیشامد ساده $\frac{1}{n(S)}$ و احتمال هر پیشامد دلخواه مانند A $(A\subseteq S)$ که اجتماعی از چند پیشامد ساده محسوب می‌شود، $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ است. احتمال هم‌شانس را احتمال کلاسیک نیز گویند. احتمال یک پیشامد تصادفی غیرهم‌شانس با توجه به شرایط مسئله محاسبه می‌شود.



قوانین احتمال در فضای نمونه‌ای گسسته

۱. برای هر پیشامد تصادفی دلخواه مانند A: $۰\le P(A)\le ۱$.

۲. $P(S)=۱$.

۳. برای پیشامدهایی مانند $A_i, ۱\le i\le n$ که دو به دو با یکدیگر اشتراک ندارند: $P(\bigcup_{i=۱}^{n}A_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)$.
و مجموع تمامی پیشامدهای ساده برابر یک است.

◆ **مثال هم‌شانس:** یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامد A که عدد برآمده بیشتر از ۴ باشد، چیست؟

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},\ A=\{۵,۶\}\to P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

◆ **مثال غیرهم‌شانس:** اگر تاس به‌گونه‌ای ساخته شده باشد که احتمال وقوع هر عدد زوج سه برابر احتمال وقوع عدد فرد باشد، احتمال پیشامد A در مثال قبل را به‌دست آورید.

اگر به پیشامدهای سادهٔ فرد بودن در $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ احتمالی برابر x اختصاص دهیم، احتمال پیشامدهای سادهٔ زوج بودن، $۳x$ خواهد بود. پس:

$$۳(x)+۳(۳x)=۱\to x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\to P(\{۵,۶\})=x+۳x=۴x=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

بخش دوم

در این بخش احتمال ترکیب چند پدیدهٔ تصادفی را از قبیل پرتاب دو سکه و یا دو تاس و یا یک سکه و تاس و... که رخداد هر یک به **تنهایی** یک احتمال **هم‌شانس** است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این رخدادها هم می‌توانند به یک پدیدهٔ تصادفی با فضای نمونه‌ای هم‌شانس منجر شوند و یا ترکیب آن‌ها یک فضای غیرهم‌شانس باشد. توجه به این مطلب هدف اصلی مقالهٔ حاضر است. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال هر پیشامد ساده را بیابید.

ب) احتمال پیشامد A را که در آن تاس فرد باشد، بیابید.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از (پشت و رو را با P و r نشان داده‌ایم):

$$S=\{(r,۱),(r,۲),(r,۳),(r,۴),(r,۵),(r,۶),(p,r),(p,p)\}$$

$$P(\{(r,۱)\})=P(\{(r,۲)\})=...=P(\{(r,۶)\})=\frac{۱}{۲\times ۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(\{(p,r)\})=P(\{(p,p)\})=\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A)=P(\{(r,۱),(r,۳),(r,۵)\})=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است.

$$P(A)=P(\{(r,۱),(r,۳),(r,۵)\})=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

اکنون به مثالی می‌پردازیم که در امتحان نهایی جبر و احتمال دی‌ماه سال ۹۱ آمده بود و کلید تصحیح آن درست نیست.

مثال ۲. سکهٔ سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید ۲ بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر رو بیاید

تاس سالمی را می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) تاس رو بیاید.

ب) سکه فقط دوبار پشت بیاید.

☼کلید تصحیح:

$$S=\{(p,p,p),(p,p,r),(p,r,p),(p,r,r),(r,۱),(r,۲),(r,۳),(r,۴),(r,۵),(r,۶)\}$$

$$A=\{(r,۲),(r,۴),(r,۶)\}\rightarrow n(A)=۳$$

$$\rightarrow P(A)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$B=\{(p,p,r),(p,r,p)\}\rightarrow n(B)=۲$$

$$\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

☼پاسخ صحیح:

احتمال همهٔ پیشامدهای ساده در این فضا یکسان نیست. برای نمونه، احتمال آمدن سه بار پشت برابر است با: $P(\{(p,p,p)\})=\frac{۱}{۲^۳}=\frac{۱}{۸}$ و احتمال اینکه سکه رو و تاس ۵ بیاید عبارت است از: $P(\{(r,۵)\})=\frac{۱}{۲\times۶}=\frac{۱}{۱۲}$. بنابراین استفاده از احتمال کلاسیک در حل این مسئله نادرست است و پاسخ صحیح عبارت است از:

$$P(A)=۳\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴},\quad P(B)=۲\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

از آنجا که در کتاب جبر و احتمال مثالی از ترکیب چند پیشامد تصادفی برای احتمال‌های غیرهم‌شانس نیامده است، طرح چنین سؤالاتی دانش‌آموزان را دچار چالش خواهد کرد. توجه به همین مسئله سبب شد که طراحان سؤال با توجه به محتوای کتاب و توانایی دانش‌آموزان به طرح این‌گونه سؤالات بپردازند. به مثال زیر که در امتحان نهایی جبر و احتمال خرداد ۹۴ آمده است، توجه کنید:

مثال ۳. یک سکهٔ سالم و یک تاس مخصوص داریم که به جای ارقام ۱ تا ۶، دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش می‌دهد. این دو را با هم می‌اندازیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای.

ب) پیشامد A که در آن تاس عدد زوج یا سکهٔ رو بیاید.

ج) پیشامد B که در آن تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

پاسخ:

$$S=\{(۱,r),(۱,p),(۲,r),(۲,p),(۳,r),(۳,p)\},$$
$$A=\{(۱,r),(۲,r),(۲,p),(۳,r)\},B=\{(۲,r)\}$$

تذکر: فرمول احتمال کلاسیک حالت خاصی از احتمال غیرهم‌شانس است که در آن احتمال همهٔ پیشامدهای ساده با هم برابرند. بنابراین در مسائلی که ترکیب چند پدیدهٔ تصادفی است، برای جلوگیری از خطایی مشابه آنچه در مثال ۲ دیدید، در حالت‌های هم‌شانس نیز بهتر است به جای استفاده از فرمول احتمال کلاسیک، از حالت غیرهم‌شانس استفاده کنیم. به عبارت دیگر، بدون توجه به هم‌شانس بودن یا نبودن از حال کلی (غیرهم‌شانس) استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴. احتمال پیشامدهای مطلوب را در مثال ۳ بیابید.

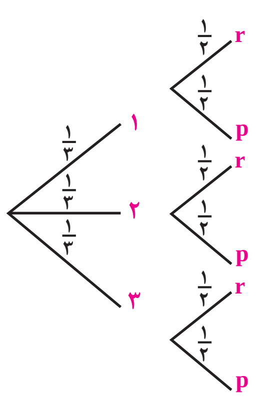
راه‌حل اول: در این فضا احتمال همهٔ پیشامدهای ساده مانند $\{(۱,r)\}$ برابر $\frac{۱}{۳\times۲}=\frac{۱}{۶}$ است. لذا پدیدهٔ تصادفی هم‌شانس است و:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳},P(B)=\frac{۱}{۶}$$

راه‌حل دوم: از حالت غیرهم‌شانس برای حل مسئله استفاده می‌کنیم (شکل ۱):

$$P(A)=P(\{(۱,r),(۲,r),(۲,p),(۳,r)\})=۴\times\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳},$$

$$P(B)=P(\{(۲,r)\})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$$



شکل ۱. نمودار درختی پرتاب یک تاس با برآمدهای ۱، ۲ و ۳ و یک سکه

استفاده از حالت غیرهم‌شانس در این نوع مسائل حالت خاصی است از فرمول احتمال کلی[1] که در کتاب‌های دانش‌آموزان چهارم تجربی و ریاضی آمده است.

بخش سوم

در این بخش به برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد فضای نمونه‌ای می‌پردازیم که بعضاً از کلاس‌های کنکور و فیلم‌های آموزشی، تقویتی و کنکور نشئت گرفته‌اند.

چالش اول: آیـا مجموعهٔ حاصل از ترکیب چند پدیده با هم، بخشـی از فضای نمونه‌ای تولید شده است یا کل آن؟ به مثال‌های زیر که یکی از تمرین‌های کتاب جبر و احتمال است، توجه کنید:

مثال ۵. سـکه‌ای را پرتاب می‌کنیـم. اگر رو بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشـت بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. ده عضو از فضای نمونه‌ای را بنویسید.

مجموعهٔ ده عضوی

$$\{(p,p,p),(p,p,r),(p,r,p),(p,r,r),(r,۱),(r,۲),(r,۳),(r,۴),(r,۵),(r,۶)\}$$

را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه تنها بخشـی از فضای نمونه‌ای اسـت یا همـهٔ آن؟ آیا همهٔ حـالات ممکن در مجموعهٔ فوق نوشـته شـده اسـت؟ بعضی از مدرسان کلاس‌هـای تقویتی در فیلم‌های آموزشـی خود چنین القا می‌کنند که مجموعهٔ موردنظر تنها بخشـی از فضای نمونه‌ای است. آیا این ادعا درست است؟

پاسخ: اگر بخشی از فضای نمونه‌ای را نوشته باشیم، نباید جمع احتمال‌های اعضای آن (پیشـامدهای ساده) برابر احتمال کل یعنی ۱ شود. اما چون مجموع احتمال $۴\times\frac{۱}{۸}+۶\times\frac{۱}{۱۲}=۱$ اسـت، لذا تعـداد عضوهای فضای نمونه‌ای همین ۱۰ عضو است[۲] و نمی‌تواند عضو دیگری داشته باشد.

مثال ۶. یک تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا جمع اعداد برآمده بیشتر از ۲ باشد. فضای نمونه‌ای این پیشامد را بنویسید.

$$\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),\ldots,(۱,۱,۶),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),۳,۴,۵,۶\}$$

آیـا این مجموعـه آن‌طور که برخـی ادعا می‌کنند بخشی از فضای نمونه‌ای است یا همهٔ آن؟

پاسـخ: با محاسبهٔ جمع همهٔ پیشامدهای ساده در مجموعهٔ فوق داریم:

$$۶\times\frac{۱}{۶^۳}+۱۱\times\frac{۱}{۶^۲}+۴\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}\left(۶\times\frac{۱}{۶^۲}+۱۱\times\frac{۱}{۶}+۴\right)$$
$$=\frac{۲۱۶}{۲۱۶}=۱$$

وقتی جمع احتمال‌ها یک اسـت، پیشـامد سـادهٔ دیگری باقی نمی‌ماند که عضو مجموعهٔ فوق باشد.

چالش دوم: اگر فضای نمونه‌ای دارای عضوهای ناهمگون باشد، یعنی بعضی از عضوها تک‌عضوی، بعضی زوج مرتب، بعضی سـه‌تایی مرتب و... باشـد، آن‌گاه آیا می‌توان نتیجـه گرفت که فضای نمونه‌ای غیریکنواخت و غیرهم‌شانس است؟ برخی چنین ادعایی دارند و برای اثبـات ادعای خود از مثال‌هایـی مانند مثال‌های ۲ و ۳ اسـتفاده می‌کنند. برای بررسـی درستی این ادعا کافی اسـت به مثال زیر که یک مثال نقض بر این ادعا اسـت توجه کنید:

مثال ۷. سکهٔ سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیایـد دو بار دیگر سـکه را پرتاب می‌کنیـم و اگر رو بیاید، چهاروجهی سـالمی را که ۴ پهلو به شماره‌های ۱ تـا ۴ دارد، می‌ریزیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسـید. آیا فضای نمونه‌ای هم‌شانس است؟ احتمال آنکه سـکه حداقل دو بار پشت بیاید یا چهاروجهی ۲ بیاید چیست؟

$$S=\{(p,p,p),(p,p,r),(p,r,p),(p,r,r),(r,۱),(r,۲),(r,۳),(r,۴)\}$$
$$P(\{(r,۱)\})=P(\{(r,۲)\})=\ldots=P(\{(r,۴)\})$$
$$=\frac{۱}{۲\times۴}=\frac{۱}{۸}$$

و احتمال همهٔ سه‌تایی‌های مرتب نیز $\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^۳}$ است.

در این مثال، با وجود ناهمگون بودن اعضای آن، احتمال پیشامدهای ساده برابر و فضای نمونه‌ای هم‌شانس است. لذا:

$$A=\{(p,p,p),(p,p,r),(p,r,p),(r,۲)\}$$
$$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

در پایـان بـار دیگـر تأکیـد می‌کنیم کـه برای جلوگیری از خطا در محاسـبهٔ احتمال مرکب از چند پیشامد، بدون توجه به هم‌شانس بودن یا نبودن پدیدهٔ تصادفی، بهتر است همیشه از حالت کلی غیرهم‌شانس اسـتفاده کنیـم. در مثال قبل احتمال وقـوع A برابر است با:

$$P(A)=۳\times\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۲\times۴}=\frac{۱}{۲}$$

پی‌نوشت

۱. حالـت خاصـی کـه وقـوع پدیده‌ها مستقل از هم است.
۲. برای اصلاح صورت سؤال بهتر اسـت کلمـهٔ «از» را از جمله حذف کنیم.